ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Αν x_0 σημείο στο I και $c_0, \ldots, c_{n-1}$ είναι σταθερές τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

$$(E): a_n \cdot y^{(n)} + \ldots + a_1 y + a_0 = b$$

η οποία είναι ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:

$$y(x_0) = c_0, \; y'(x_0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Ας είναι x_0 σημείο στο I. Τότε y είναι μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης α' τάξης:

$$(E_0): a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0$$

αν-ν

$$y(x) = y(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt}, \; \forall x \in I$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Αν $c_1, \ldots, c_n$ σταθερές και $y_1, \ldots, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), τότε $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ είναι επίσης λύση της (E_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: Ας είναι $y_1, \ldots, y_n$ λύσεις της (E_0). Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες $\Leftrightarrow W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$, $x \in I$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: Έστω x_0 σημείο στο I. και $y_1, \ldots, y_n$ λύσεις της (E_0). Τότε ισχύει:

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt}, \; \forall x \in I$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6: Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων (ΒΣΛ) της (E_0)

ΘΕΩΡΗΜΑ 7: Έστω $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ΒΣΛ της (E_0). Τότε $\forall y$ λύση της (E_0), υπάρχουν μοναδικά $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8: Ας είναι $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ (γραμμικώς ανεξάρτητες) με συνεχείς παραγώγους n-τάξης και $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$, $x \in I$. Τότε $\exists!$ γραμ. διαφ. εξ. μορφής (E_0) με $a_n = 1$ και ΒΣΛ $\{y_1, \ldots, y_n\}$ και

$$W(y_1, \ldots, y_n, y)(x) / W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 9: Ας είναι y_1 μερική λύση της (E_0) με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Για $y=u\cdot y_1$ και $v=u'$ μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση ομογενή $(n-1)$-τάξης και γραμμική. Αν τώρα το $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ ΒΣΛ της νέας εξίσωσης και

$$y_i(x)=y_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x} v_{i-1}(t)\,dt\ ,\quad \forall x\in I \qquad (i=2,\dots,n)$$

με $x_0\in I$. Τότε το σύνολο $\{y_1,\dots,y_n\}$ είναι ΒΣΛ της (E_0)

ΘΕΩΡΗΜΑ 10: Αν y_1 είναι λύση της (E_0) με $y_2(x)\neq 0, \forall x\in I$ 2ης τάξης και:

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y_1^2(t)}\cdot e^{-\int_{x_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_2(s)}ds}\right)dt\ ,\quad x\in I$$

όπου $x_0\in I$, τότε $\{y_1,y_2\}$ είναι ΒΣΛ της (E_0)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση α' τάξης

$$x\cdot y'-\frac{1}{2\cdot\log x}\,y=0\ ,\quad x>1$$

Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y_1 αυτής που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y_1(e)=1$

ΛΥΣΗ

Βάσει του Θεωρήματος 2 έχουμε ότι η y είναι μία λύση της ΔΕ $\Leftrightarrow y(x)=y(e)\cdot e^{-\int_e^x\frac{-1/2\log t}{t}dt}$

όπου

$$y(x)=y(e)\cdot e^{-\int_e^x\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{t\cdot\log t}}=y(e)\cdot e^{\frac{1}{2}\left[\log(\log t)\right]_e^x}=y(e)(\log x)^{1/2}=$$

$$=y_1(e)\cdot(\log x)^{1/2}=(\log x)^{1/2}\Rightarrow y_1(x)=(\log x)^{1/2}\ ,\quad \forall x>1$$

Επομένως, όλες οι λύσεις θα δίνονται από τον τύπο

$$y(x)=c\cdot(\log x)^{1/2}\quad \text{όπου } c: \text{αυθαίρετη σταθερά.}$$

2) Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 0$, $x>0$

αφού βρεθούν οι λύσεις της μορφής $y(x) = x^\nu$, $x>0$ ($\nu \in \mathbb{Z}$)

Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες: $y_0(1)=0$, $y_0'(1)=1$ και $y_0''(1)=2$

ΛΥΣΗ

Η $y(x)=x^\nu$, $x>0$ και $\nu\in\mathbb{Z}$ είναι μια λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης $\Leftrightarrow x^3(x^\nu)''' - 4x^2(x^\nu)'' + 8x(x^\nu)' - 8x^\nu = 0$

ή ισοδύναμα: $x^3 \nu(\nu-1)(\nu-2)x^{\nu-3} - 4x^2\nu(\nu-1)\cdot x^{\nu-2} + 8x\nu x^{\nu-1} - 8x^\nu = 0$

ή ισοδύναμα: $\nu(\nu-1)(\nu-2)x^\nu - 4\nu(\nu-1)x^\nu + 8\nu\cdot x^\nu - 8x^\nu = 0$

ή ισοδύναμα: $\nu(\nu-1)(\nu-2) - 4\nu(\nu-1) + 8\nu - 8 = 0$

αυτό ισχύει αν-ν $\nu=1$ ή $\nu=2$ ή $\nu=4$.

Άρα, οι λύσεις της μορφής x^ν, $\nu\in\mathbb{Z}$ & $x>0$ είναι οι

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ και $y_3(x) = x^4$, $\forall x>0$

Είναι η y_1, y_2, y_3 γραμμικά ανεξάρτητες; (Θεώρημα 4)

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix} = 2x^4 \neq 0 \quad (x>0)$$

Άρα, οι y_1, y_2, y_3 γραμμ. ανεξάρτητες και άρα το σύνολο των λύσεων $\{y_1, y_2, y_3\}$ αποτελεί ένα ΒΣΛ.

Επομένως, από Θεώρημα 7 (ή Θεώρημα 3) η:

$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$ · αποτελεί λύση της εξίσωσης

Δηλαδή

$y_0(x) = c_1\cdot x + c_2 x^2 + c_3 x^4$

$y_0'(x) = c_1 + 2c_2 x + 4c_3 x^3$

$y_0''(x) = 2c_2 + 12c_3 x^2$

Για $x=1$, έχουμε:

$y_0(1) = c_1 + c_2 + c_3 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$ $\rightsquigarrow c_1 = -1$

$y_0'(1) = c_1 + 2c_2 + 4c_3 \Leftrightarrow c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 1$ $\rightsquigarrow c_2 = 1$

$y_0''(1) = 2c_2 + 12c_3 = 2 \Leftrightarrow c_2 + 6c_3 = 1$ $\rightsquigarrow c_3 = 0$

Άρα, $y_0(x) = -x + x^2$, $\forall x>0$.

3) Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^x(x-1)$ και $y_3(x) = 2e^x - e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι αυτές είναι λύσεις της εξ.
$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

ΛΥΣΗ

Με αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση, επαληθεύεται εύκολα ότι οι συναρτήσεις $(y_1, y_2, y_3)(x)$ αποτελούν λύσεις της εξ.

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x x & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x(x+1) & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Έστω ένα $x_0 \in I$ ώστε $W(y_1,y_2,y_3)(x_0) \neq 0$

Ας είναι $x_0 = 0$

τότε $W(y_1,y_2,y_3) = -1 \neq 0$

Και άρα από Θεώρημα 5 έχουμε ότι:

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = W(y_1,y_2,y_3)(0) \cdot e^{-\int_0^x \frac{-4}{1} dt} = -e^{4x}$$

Προσοχή! → Δεν λέμε ότι η (1) δεν υπολογίζεται απλώς το Θεώρημα 5 (ή Θ. Liouville) είναι πιο άμεσο

4) Έστω οι συναρτήσεις $y_1(x) = x$, $x>0$ και $y_2(x) = x\log x$, $x>0$
Να βρεθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης με $a_2 = 1$ (← συντελεστής του y'') και με ΒΣΛ $\{y_1, y_2\}$

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε διαφορική εξίσωση μορφής:
$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$
Για όλα τα $x>0$:

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \quad (x>0)$$

Έτσι, από Θεώρημα 8 η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$: \dfrac{W(y_1,y_2,y)}{W(y_1,y_2)} = 0 \rightsquigarrow \dfrac{1}{x} \cdot \begin{vmatrix} x & x\log x & y \\ 1 & \log x + 1 & y' \\ 0 & \frac{1}{x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow y'' - \dfrac{1}{x} y' + \dfrac{1}{x^2} y = 0$

SOS

5) i. ΝΔΟ οι συναρτήσεις $y_1(x) = x$ & $y_2(x) = x\log x$, $x>0$ αποτελούν ένα ΒΣΛ της εξίσωσης:

$$x^2 \cdot y'' - xy' + y = 0, \quad x>0$$

ii. Στη συνέχεια να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης:

$$x^3 \cdot y''' - 4x^2 \cdot y'' + 9xy' - 9y = 0, \quad x>0$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι η $y_1(x) = x$, $x>0$ λύση της

ΛΥΣΗ

i. Πρώτα από όλα οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 \cdot y'' - xy' + y = 0$, $x>0$ διότι την επαληθεύουν. Για να αποτελούν και ένα ΒΣΛ αρκεί να είναι γραμ. ανεξ. Άρα, αρκεί $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$, για όλα τα $x>0$

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = \cancel{x\log x} - \cancel{x\log x} + x \neq 0 \quad (x>0)$$

ii. Η $y_1(x) = x$ είναι λύση της ζητούμενης εξίσωσης (αφού $x^3 \cdot 0 - 4x^2 \cdot 0 + 9x - 9x = 0$ ισχύει).

Θα την ανάγουμε σε 2ης τάξης βάση του Θεωρήματος $\S$

Θέτω $y = y_1 \cdot u = xu$, $\forall x>0 \rightsquigarrow y' = u + xu' \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow y'' = u' + u' + xu'' = 2u' + xu'' \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow y''' = 2u'' + u'' + xu''' = 3u'' + xu'''$

Επομένως, στη διαφορική εξίσωση, έχουμε:

$$x^3 \cdot (3u'' + xu''') - 4x^2 \cdot (2u' + xu'') + 9x(u + xu') - 9xu = 0$$

ισοδύναμα, προκύπτει:

$x^2 u''' - xu'' + u' = 0$ και θέτουμε $u' = v$

άρα $x^2 \cdot v'' - xv' + v = 0$ (καταλήγουμε δηλαδή στην εξ. (i)) όπου έχει προφανείς λύσεις (i) $v_1(x) = x$ & $v_2(x) = x\log x$, $x>0$ της νέας εξίσωσης

Επομένως, από Θεώρημα 3 (ή Θεώρημα 10) λόγω ότι η $y_1(x)=x$, $x>0$ λύση της αρχικής δοθέντος εξίσωσης τότε:

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int_1^x v_1(t)\,dt = x\int_1^x t\,dt=\frac{1}{2}(x^3-x)$$

και

$$y_3(x)=y_1(x)\cdot\int_1^x v_2(t)\,dt = x\int_1^x t\log t\,dt=\frac{1}{2}x^3\log x-\frac{1}{4}(x^3-x)$$

Τότε, το $\{y_1,y_2,y_3\}$ ΒΣΛ της δοθέντος εξίσωσης οπότε από Θεώρημα 7 οι λύσεις δίνονται από τον τύπο $y(x)=c_1x+c_2\frac{1}{2}(x^3-x)+c_3\left(\frac{1}{2}x^3\log x-\frac{1}{4}(x^3-x)\right)$, $x>0$ με $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

6) Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης:

$$(*)\quad (2x+1)y''-4(x+1)y'+4y=0\quad,\ x>-\frac{1}{2}$$

αφού πρώτα βρεθεί μια λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1=e^{cx}$, $x>-\frac{1}{2}$ (c: σταθ).

ΛΥΣΗ

Η $y_1=e^{cx}$ $x>\frac{1}{2}$ είναι μία λύση της $(*)$ αν-ν:

$(2x+1)c^2e^{cx}-4(x+1)c\cdot e^{cx}+4e^{cx}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2c^2-4c)x+(c-2)^2=0 \Leftrightarrow (2c^2-4c=0$ και $(c-2)^2=0)$

$\Leftrightarrow c=2$. Έτσι, μια λύση είναι η $y_1(x)=e^{2x}$, $x>-\frac{1}{2}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int_0^x\left(\frac{1}{y_1^2(t)}e^{-\int_0^t\frac{-4(s+1)}{2s+1}ds}\right)dt=$$

$$=e^{2x}\int_0^x\left(\frac{1}{e^{4t}}e^{2t+\log(2t+1)}\right)dt=e^{2x}-x-1,\ \forall x>-\frac{1}{2}$$

Άρα, το $\{y_1,y_2\}$ αποτελεί ΒΣΛ της $(*)$ και έτσι από Θεώρημα 7 (ή Θεώρημα 3) όλες οι λύσεις δίνονται από τη συνάρτηση:

$$y(x)=c_1\cdot e^{2x}+c_2\cdot(e^{2x}-x+1)\quad,\ \forall x>-\frac{1}{2}$$

με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.